Calcul stochastique

Rappels de probabilité

Modes de convergence

Définition (Convergence en loi)**.** $X_n \overset{\mathcal{L}}{\to} X$ si

$$\lim_{n\to\infty} F_n(x) = F(x)$$

$\forall x \in \mathbb{R}$ où F est continue

Définition (Convergence en probabilité)**.** $X_n \overset{\mathbb{P}}{\to} X$ si

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(|X_n - X| \geq \epsilon) = 0, \forall \epsilon > 0$$

Théorème (Lien entre les convergences)**.** *On a :*

$$[X_n \overset{p.s}{\to} X] \implies [X_n \overset{\mathbb{P}}{\to} X] \implies [X_n \overset{\mathcal{L}}{\to} X]$$
$$\cdots \implies [\Phi_{X_n}(t) \to \Phi_X(t), \forall t]$$

$$\begin{tikzcd}
 & L^1 \arrow[dr, shift left] & & \\
L^p \arrow[ur] & & Proba \arrow[ul, shift left, "u.i"] \arrow[r] \arrow[dl, shift left, "ss\ suite"] & Loi \\
 & p.s \arrow[ur, shift left] & &
\end{tikzcd}$$

Définition (Mesurabilité)**.** Soient E et F des espaces mesurables munis de leurs tribus respectives $\mathcal{E}$ et $\mathcal{F}$.

Une fonction $f : E \to F$ est dite $(\mathcal{E}, \mathcal{F})$-mesurable si :

$$\forall B \in \mathcal{F},\ f^{-1}(B) \in \mathcal{E}$$

Vecteurs et Processus Gaussiens

Espaces et processus gaussiens

Définition. Un processus aléatoire $(X_t)_{t\in T}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ est un processus gaussien (centré) si toute combinaison linéaire finie des variables $X_t, t \in T$ est gaussienne centrée.

Proposition. *Si $(X_t)_{t\in T}$ est un processus gaussien, le sous-espace vectoriel fermé de L^2 engendré par les variables X_t, $t \in T$ est un espace gaussien, appelé espace gaussien engendré par le processus X.*

Théorème. *Soit H un espace gaussien et soit $(H_i)_{i\in I}$ une famille de sous-espaces vectoriels de H. Alors les sous-espaces H_i, $i \in I$ sont orthogonaux deux à deux dans L^2 si et seulement si les tribus $\sigma(H_i)$, $i \in I$ sont indépendantes.*

Mesures gaussiennes

Définition. Soit $(E, \mathcal{E})$ un espace mesurable, et soit μ une mesure σ-finie sur $(E, \mathcal{E})$. Une mesure gaussienne d'intensité μ est une isométrie G de $L^2(E, \mathcal{E}, \mu)$ sur un espace gaussien. Donc, si $f \in L^2(E, \mathcal{E}, \mu)$, $G(f)$ est une variable aléatoire gaussienne centrée de variance :
$\mathbb{E}[G(f)^2] = \|G(f)\|^2_{L_2(\Omega,\mathcal{F},P)} = \|f\|^2_{L_2(E,\mathcal{E},\mu)}$. En particulier, si $f = \mathbb{1}_A$ avec $\mu(A) < \infty$, $G(\mathbb{1}_A)$ suit la loi $\mathcal{N}(0, \mu(A))$. On notera pour simplifier $G(A) = G(1_A)$.

Proposition. *Soient $(E, \mathcal{E})$ un espace mesurable et μ une mesure σ-finie sur $(E, \mathcal{E})$. Il existe alors une mesure gaussienne d'intensité μ.*

Mouvement Brownien

Pré-mouvement brownien

Définition. Soit G une mesure gaussienne sur $\mathbb{R}_+$ d'intensité la mesure de Lebesgue. Le processus $(B_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ défini par $B_t = G(\mathbb{1}_{[0,t]})$ est appelé pré-mouvement brownien.

Proposition. *Le processus $(B_t)_{t\geq 0}$ est un processus gaussien (centré) de fonction de covariance $K(s,t) = \min\{s,t\}$*

Proposition. *Soit $(X_t)_{t\geq 0}$ un processus aléatoire à valeurs réelles. Il y a équivalence entre les propriétés suivantes :*

1. *$(X_t)_{t\geq 0}$ est un pré-mouvement brownien*
2. *$(X_t)_{t\geq 0}$ est un processus gaussien centré de covariance $K(s,t) = s \wedge t$*
3. *$X_0 = 0$ p.s. et pour tous $0 \leq s < t$, la variable $X_t - X_s$ est indépendante de $\sigma(X_r, r \leq s)$ et suit la loi $\mathcal{N}(0, t-s)$*
4. *$X_0 = 0$ p.s. et pour tout choix de $0 = t0 < t_1 < \cdots < t_p$, les variables $X_{t_i} - X_{t_{i-1}}$, $1 \leq i \leq p$ sont indépendantes, la variable $X_{t_i} - X_{t_{i-1}}$ suivant la loi $\mathcal{N}(0, t_i - t_{i-1})$*

Proposition. *Soit B un pré-mouvement brownien. Alors,*

1. *$-B$ est aussi un pré-mouvement brownien*
2. *pour tout $\lambda > 0$, le processus $B^\lambda_t = \frac{1}{\lambda} B_{\lambda^2 t}$ est aussi un pré-mouvement brownien*
3. *pour tout $s \geq 0$, le processus $B(s) = B_{s+t} - B_s$ est un pré-mouvement brownien indépendant de $\sigma(B_r, r \leq s)$ (propriété de Markov simple)*

Continuité des trajectoires

Proposition. *Soit $B = (B_t)_{t\geq 0}$ un pré-mouvement brownien. Le processus B a une modification dont les trajectoires sont continues, et même localement höldériennes d'exposant $1-\delta$ pour tout $\delta \in]0, \frac{1}{2}[$.*

Définition. Un processus $(B_t)_{t\geq 0}$ est un mouvement brownien (réel, issu de 0) si

- $(B_t)_{t\geq 0}$ est un pré-mouvement brownien
- Les trajectoires de B, c'est-à-dire les applications $t \to B_t(\omega)$ pour $\omega \in \Omega$, sont toutes continues

Comportement des trajectoires

Proposition.
- *On a p.s. pour tout $\varepsilon > 0$, $\sup_{0\leq s\leq\varepsilon} B_s > 0$, $\inf_{0\leq s\leq\varepsilon} B_s > 0$*
- *p.s., $\forall a \in \mathbb{R}$, $\inf\{t \geq 0 : B_t = a\} < \infty$*
- *$\limsup_{t\to\infty} B_t = +\infty$ et $\liminf_{t\to\infty} B_t = -\infty$*

Propriétés de Markov

Théorème (Propriété de Markov forte)**.** *Soit T un temps d'arrêt tel que $\mathbb{P}(T < \infty) > 0$. On pose pour tout $t \geq 0$ $B^{(T)}_t = \mathbb{1}_{\{T<\infty\{}(B_{T+t} - B_T)$. Alors sous $\mathbb{P}(\cdot | T < \infty)$, le processus $B^{(T)}_t$ est un mouvement brownien indépendant de $\mathcal{F}_T$*

Théorème. *Pour tout $t > 0$, notons $S_t = \sup_{s\leq t} B_s$. Alors, si $a \geq 0$ et $b \leq a$, on a*

$$\mathbb{P}[S_t \geq a, B_t \leq b] = \mathbb{P}[B_t \geq 2a - b]$$

En particulier S_t a même loi que $|B_t|$

Corollaire. *Pour tout $a > 0$, T_a a même loi que $\frac{a^2}{B_1^2}$.*

Loi du logarithme itéré

Théorème (Loi du logarithme itéré)**.**

$$\mathbb{P}\left\{\limsup_{t\to 0} \frac{B_t}{\sqrt{2t\log(\log(1/t))}} = 1\right\} = 1$$

$$\mathbb{P}\left\{\liminf_{t\to 0} \frac{B_t}{\sqrt{2t\log(\log(1/t))}} = -1\right\} = 1$$

$$\mathbb{P}\Big\{\limsup_{t\to 0} \frac{B_t}{\sqrt{2t\log(\log(1/t))}} = 1, \ldots$$

$$\ldots \liminf_{t\to 0} \frac{B_t}{\sqrt{2t\log(\log(1/t))}} = -1\Big\} = 1$$

Filtrations et martingales

Temps d'arrêt

Définition. Une variable aléatoire $T : \Omega \to [0, \infty]$ est un temps d'arrêt de la filtration $(\mathcal{F}_t)$ si, pour tout $t \geq 0, \{T \leq t\} \in \mathcal{F}_t$.

Proposition.
- *Soit T un temps d'arrêt. Alors T est $\mathcal{F}_T$-mesurable*
- *Si (S_n) est une suite croissante de temps d'arrêt, alors $S = \lim \uparrow S_n$ est aussi un temps d'arrêt*
- *Si (S_n) est une suite décroissante de temps d'arrêt, alors $S = \lim \downarrow S_n$ est un temps d'arrêt de la filtration $(\mathcal{F}_{t^+})$*

Théorème (Temps d'entrée)**.** *Soit $(X_t)_{t\geq 0}$ un processus adapté, à valeurs dans un espace métrique (E, d).*

1. *Supposons que les trajectoires de X sont continues à droite, et soit O un ouvert de E. Alors $T_O = \inf\{t \geq 0 : X_t \in O\}$ est un temps d'arrêt de la filtration (F_{t^+})*
2. *Supposons que les trajectoires de X sont continues, et soit F un fermé de E. Alors $T_F = \inf\{t \geq 0 : X_t \in F\}$ est un temps d'arrêt*

Martingales et surmartingales

Proposition. *Soit $(X_t)_{t\geq 0}$ une sous-martingale ou une surmartingale. Alors pour tout $t > 0$, $\sup_{0\leq s\leq t} \mathbb{E}[|X_s|] < \infty$*

Proposition. *Soit (M_t) une martingale de carré intégrable ($M_t \in L^2$ pour tout $t \geq 0$). Soient $0 \leq s < t$ et soit $s = t_0 < t_1 < \cdots < t_p = t$ une subdivision de l'intervalle $[s,t]$.*

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[\sum_{i=1}^{p}(M_{t_i} - M_{t_{i-1}})^2|\mathcal{F}_s] &= \mathbb{E}[M_t^2 - M_s^2|\mathcal{F}_s]\\ &= \mathbb{E}[(M_t - M_s)^2|\mathcal{F}_s]\end{aligned}$$

Proposition (Inégalités de Doob)**.**

1. *Soit (X_t) une surmartingale (à temps continu) à trajectoires continues à droite. Alors, pour tout $t > 0$ et tout $\lambda > 0$*

$$\lambda\mathbb{P}\left[\sup_{0\leq s\leq t}|X_s| > \lambda\right] \leq \mathbb{E}[|X_0|] + 2\mathbb{E}[|X_t^+|]$$

2. *Soit (X_t) une martingale à trajectoires continues à droite. Alors pour tout $t > 0$ et tout $p > 1$*

$$\mathbb{E}\left[\sup_{0\leq s\leq t}|X_s|^p\right] \leq \left(\frac{p}{p-1}\right)^p \mathbb{E}\left[|X_t|^p\right]$$

3. *Soit (X_t) une martingale continue, $\forall T > 0$, $\forall p \in [1, \infty[$ on a*

$$\mathbb{P}\left[\sup_{0\leq s\leq T}|X_s| > \lambda\right] \leq \frac{1}{\lambda^p}\mathbb{E}[|X_T|^p]$$

Proposition (Inégalité des montées de Doob)**.** *Soit Z une sous-martingale. Pour $a < b$, le nombre U_n de montées de Z de a à b entre les instants 0 et $n \geq 1$ vérifie :*

$$\mathbb{E}[U_n] \leq \frac{1}{b-a}\mathbb{E}[(Z_n - a)^+]$$

Théorème. *Supposons que la filtration (F_t) satisfait les conditions habituelles. Si $X = (X_t)$ est une surmartingale et si la fonction $t \to \mathbb{E}[X_t]$ est continue à droite, alors X a une modification, qui est aussi une $(\mathcal{F}_t)$-surmartingale, càdlàg.*

Théorèmes d'arrêt

Théorème. *Soit X une surmartingale à trajectoires continues à droite et bornée dans L^1. Alors, il existe une variable $X_\infty \in L^1$ telle que*

$$\lim_{t\to\infty} X_t = X_\infty, \text{ p.s.}$$

Proposition. *Soit (X_t) une martingale à trajectoires continues à droite. Alors il y a équivalence entre*

1. *(X_t) est fermée*
2. *X_t converge p.s. et dans L^1 quand $t \to \infty$, vers une variable notée X_∞*
3. *la famille (X_t) est uniformément intégrable*

Théorème (Théorème d'arrêt)**.** *Soit (X_t) une martingale à trajectoires continues à droite et uniformément intégrable. Soient S et T deux temps d'arrêt avec $S \leq T$. Alors X_S et X_T sont dans L^1 et*

$$X_S = \mathbb{E}[X_T|\mathcal{F}_S]$$

Corollaire. *Soit (X_t) une martingale à trajectoires continues à droite et soient $S \leq T$ deux temps d'arrêt bornés. Alors $X_S = \mathbb{E}[X_T|\mathcal{F}_S]$.*

Semimartingales Continues

Processus à variation finie

Définition. Soit $T > 0$. Une fonction continue $a : [0,T] \to \mathbb{R}$ telle que $a(0) = 0$ est dite à variation finie s'il existe une mesure signée μ sur $[0,T]$ telle que $a(t) = \mu([0,t])$ pour tout $t \in [0,T]$.

Proposition. *Pour tout $t \in]0,T]$*

$$|\mu|([0,t]) = \sup\{\sum_{i=1}^{p}|a(t_i) - a(t_{i-1})|\}$$

où le supremum porte sur toutes les subdivisions.

Définition. Un processus à variation finie $A = (A_t)$ est un processus adapté dont toutes les trajectoires sont à variation finie au sens de la définition précédente. Le processus A est appelé processus croissant si de plus les trajectoires de A sont croissantes.

Proposition. *Soit A un processus à variation finie et soit H un processus progressif tel que*

$$\forall t \geq 0 \forall\omega \in \Omega \int_0^t |H_s(\omega)||\mathrm{d}A_s(\omega)| < \infty$$

Alors le processus $H \cdot A$ defini par

$$(H \cdot A)_t = \int_0^t H_s \,\mathrm{d}A_s$$

est un processus à variation finie.

Martingales locales

Définition (Martingales locales)**.** Un processus adapté à trajectoires continues $M = (M_t)$ tel que $M_0 = 0$ p.s. est une martingale locale (continue) s'il existe une suite croissante (T_n) de temps d'arrêt telle que $T_n \uparrow \infty$ et pour tout n le processus arrêté M^{T_n} est une martingale uniformément intégrable. Plus généralement, lorsque $M_0 \neq 0$, on dit que M est une martingale locale si $M_t = M_0 + N_t$, où le processus N est une martingale locale issue de 0 .

Intégrale stochastique
