

Mouvement Brownien

Evaluation d'actifs

Modèle de marché

Définition. $S_{t_{k+1}}^0 = S_{t_k}^0 e^{r(t_{k+1}-t_k)}$

Définition. $V_{t_k} = \sum_{i=0}^d \theta_{t_k}^i S_{t_k}^i = \langle \theta_{t_k}, S_{t_k} \rangle$

Définition. $(\theta \bullet \Delta \tilde{S})_{t_0} = \sum_{m=1}^k \langle \theta_{t_m}, \Delta \tilde{S}_{t_m} \rangle$

Définition (Stratégie autofinancée). $\tilde{V}_{t_k} = \tilde{V}_{t_0} + (\theta \bullet \Delta \tilde{S})_{t_k}$

Définition (Déf équivalente). $\langle \theta_{t_{k-1}}, S_{t_{k-1}} \rangle = \langle \theta_{t_{k-1}}, S_{t_{k-1}} \rangle$

Proposition (Call-Put).

$$C_t(S, T, K) - P_t(S, T, K) = S - K e^{-r(T-t)}$$

Théorème. \tilde{S} une \mathbb{Q} -martingale \Rightarrow A.O.A

Réplication d'actifs

Proposition (Prix d'un actif réplifiable).

$$p_{t_k}^G = e^{rT} \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[Ge^{-rT} | \mathcal{F}_{t_k}]$$

Théorème (Risque neutre arbre binomial). Soit $t_k = k\Delta t$

1. $d < e^{r\Delta t} < u$
2. $\mathbb{Q}(Y_1 = u) = q$ et $\mathbb{Q}(Y_1 = d) = 1 - q$
3. $q = \frac{e^{r\Delta t} - d}{u - d}$

Théorème (Evaluation des actifs indép du chemin). Soit $G = \phi(S_T^1)$

1. $p_{t_k}^G(X) = e^{-r\Delta t} [qp_{t_{k+1}}^G(Xu) + (1-q)p_{t_{k+1}}^G(Xd)]$
2. $v = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[e^{-rT}\phi(S_T^1)]$
3. $\theta_{t_k}^1 = \frac{p_{t_k}^G(uS_{t_{k-1}}^1) - p_{t_k}^G(dS_{t_{k-1}}^1)}{uS_{t_{k-1}}^1 - dS_{t_{k-1}}^1}$

Mouvement Brownien et Itô

Processus Stochastiques

Définition. X mesurable si $\forall \alpha_1, \dots, \alpha_d$ on a $\{(t, \omega) : X_t^1(\omega) \leq \alpha^1, \dots, X_t^d(\omega) \leq \alpha^d\} \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^+) \otimes \mathcal{F}$

Proposition. Si $X = (X^1, \dots, X^N)$ est un vecteur gaussien alors $\Phi_X(\xi) = e^{i\langle \xi, \mathbb{E}[X] \rangle - \frac{1}{2}\langle \xi, K_X \xi \rangle}$ ou K_X est la matrice de covariance

Martingales en temps continu

Proposition. Soit M une sous-martingale.

$F = \{s_1 \leq \dots \leq s_N\}$ ensemble fini

$$\lambda \mathbb{P}(\max_{s \in F} M_s \geq \lambda) \leq \mathbb{E}[\max_{s \in F} M_s]$$

Proposition (Inégalité maximale de Doob). Soit M une sous-martingale à trajectoires continues

$$\lambda \mathbb{P}(\max_{s \in [\tau, T]} M_s \geq \lambda) \leq \mathbb{E}[\max_{s \in [\tau, T]} M_s]$$

Proposition (Inégalité Doob II). Soit M une sous-martingale à trajectoires continues, $p > 1$ et $\lambda > 0$

$$\mathbb{E}[(\sup_{s \in [\tau, T]} |M_s|)^p] \leq (\frac{p}{p-1})^p \mathbb{E}[|M_s|^p]$$

Mouvement Brownien

Définition. B un mouvement brownien si

1. B à trajectoires continues
2. $\forall 0 \leq s \leq t$, $B_t - B_s$ indépendant de \mathcal{F}_s
3. $\forall 0 \leq s \leq t$, $B_t - B_s \sim \mathcal{N}(0, t - s)$

Proposition. B mouvement brownien $\Leftrightarrow B$ processus gaussien continu, $e_B(t) = 0$ et $K_B(s, t) = \min(s, t)$

Proposition (Théorème de Levy). Si M_t martingale continue avec $M_0 = 0$ telle que $M_t^2 - t$ martingale alors M_t mouvement brownien.

Proposition. Si B mouvement brownien, $T \geq 0$, $\lambda \geq 0$ alors :

1. $\{-B_t\}$
2. $\{B_{T+t} - B_T\}$
3. $\{\frac{1}{\sqrt{\lambda}}B_{\lambda t}\}$
4. $\{tB_{1/t}\}$

sont des mouvements browniens.

Proposition. $\forall \epsilon > 0 \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{B_t}{t^{\frac{1}{2}+\epsilon}} = 0$ p.s.

Proposition. $\forall T \geq 0, x \in \mathbb{R} : \mathbb{P}(\exists s \geq T, B_s = x) = 1$

Proposition. $\mathbb{P}(\inf_{t \geq 0} B_t = -\infty) = 1$ et $\mathbb{P}(\sup_{t \geq 0} B_t = \infty) = 1$

Définition (Variation d'ordre p). Soit

$\Delta = \{t_0 = 0 \leq t_1 \leq \dots \leq t_n = t\}$ une subdivision de $[0, t]$, $|\Delta| = \sup_i |t_i - t_{i-1}|$, $p > 1$

$$V_t^{(p)}(g, \Delta) = \sum_{i=1}^n |g(t_i) - g(t_{i-1})|^p$$

$g : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$ à variation totale d'ordre p si

$\forall 0 \leq t \leq T : \sup_{\Delta} V_t^{(p)}(g, \Delta) < \infty$

$\text{Si } \lim_{t \rightarrow \infty} V_t^{(p)}(g) < \infty \text{ avec } V_t^{(p)}(g) = \limsup_{|\Delta| \rightarrow 0} V_t^{(p)}(g, \Delta) \text{ on dit que } g \text{ de variation d'ordre p bornée.}$

Proposition. $\lim_{|\Delta| \rightarrow 0} \mathbb{E}[|V_t^{(2)}(B, \Delta) - t|^2] = 0$

C'est à dire : $V_t^{(2)}(B, \Delta) \xrightarrow[\Delta \rightarrow 0]{L^2} t$

Proposition. Les trajectoires de B sont presque sûrement à variation totale infinie sur $[0, t]$

Définition. Un processus est dit à variation quadratique finie si il existe un processus fini $\langle X \rangle_t$ tel que $\Delta^n, |\Delta^n| \rightarrow 0$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} V_t^{(2)}(X, \Delta^n) = \langle X \rangle_t \text{ p.s.}$$

On note : $\langle X, Y \rangle_t = \frac{\langle X+Y \rangle_t - \langle X \rangle_t - \langle Y \rangle_t}{2}$

Proposition (Théorème de Levy de caractérisation). Soit M_t une martingale continue avec $M_0 = 0$ telle que $\langle X \rangle_t = t$ alors M_t est un mouvement brownien.

Intégrale d'Itô

Définition (Processus élémentaire). $H \in \mathcal{E}$ est un processus élémentaire si $H_t(\omega) = \sum_{i=1}^n H_i(\omega) \mathbb{1}_{[t_{i-1}, t_i]}$ avec $\{t_0 \leq \dots \leq t_n = T\}$ subdivision, H_i est $\mathcal{F}_{t_{i-1}}$ -mesurable et $\sup_i |H_i| < \infty$

Définition. $\int_0^t H_u dB_u = \sum_{i=1}^n H_i(B_{t \wedge t_i} - B_{t \wedge t_{i-1}})$ est :

1. \mathbb{F} -adapté et à trajectoires continues
2. Une \mathbb{F} -martingale qui démarre à zero.
3. Une isométrie : $\mathbb{E}[(\int_0^t H_u dB_u)^2] = \mathbb{E}[\int_0^t H_u^2 du]$
4. $\mathbb{E}[(\int_0^t H_u dB_u)(\int_0^t K_u dB_u) | \mathcal{F}_s] = \mathbb{E}[(\int_0^{\min(t, \tau)} H_u K_u du | \mathcal{F}_s)]$
5. $\{\int_0^t H_u dB_u\}^2 - \{\int_0^t H_u^2 du\}$ est une \mathbb{F} -martingale démarrant en zéro.

Proposition (Variation quadratique I). Soit $H \in \mathcal{E}$

$$\begin{aligned} \langle \int_0^t H_u dB_u \rangle &= \int_0^t H_u^2 du \\ \langle \int_0^t H_u dB_u, \int_0^t K_u dB_u \rangle &= \int_0^t H_u K_u du \end{aligned}$$

Intégration des processus de \mathcal{L}^2

$$\mathcal{L}^2 := \left\{ \{H_t, 0 \leq t \leq T\} \text{ } \mathbb{F}\text{-adapté} \mid \mathbb{E} \left[\int_0^T H_u^2 du \right] < \infty \right\}$$

Proposition. $H \rightarrow \mathbb{E} \left[\int_0^T H_u^2 du \right]$ définit une norme sur \mathcal{L}^2

Lemme. \mathcal{E} dense dans \mathcal{L}^2 pour $\|\cdot\|_{\mathcal{L}^2}$

Théorème (Intégrale stochastique II). Il existe une unique application linéaire \mathcal{I} qui prolonge l'intégrale d'Itô de \mathcal{E} et vérifie la propriété d'isométrie :

$$\mathbb{E}[\mathcal{I}[H]_t^2] = \mathbb{E}[\int_0^t H_s^2 ds]$$

Proposition (Intégrale de Wiener). Soit $f \in C^0$. Le processus $\{\int_0^t f(s) dB_s\}_t$ vérifie :

$$\int_0^t f(s) dB_s \sim \mathcal{N}(0, \int_0^t f^2(s) ds)$$

Intégration des processus de \mathcal{L}

$$\mathcal{L} := \left\{ \{H_t\}_t \text{ } \mathbb{F}\text{-adapté} \mid \int_0^T H_u^2 du < \infty \text{ p.s.} \right\}$$

Théorème (Intégrale stochastique III). Il existe une unique application linéaire \mathcal{J} qui coïncide avec l'intégrale stochastique sur \mathcal{E} et vérifie la propriété de continuité : si $(H^n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite de processus simples telles que $\int_0^T (H_u^n)^2 du \rightarrow 0$ en probabilité alors : $\sup_{t \in [0, T]} (\mathcal{J}(H^n)_t) \rightarrow 0$ en probabilité.

Calcul d'Itô

Définition (Processus d'Itô). *Un processus X est appelé processus d'Itô si il s'écrit de la forme :*

$$X_t = X_0 + \int_0^t \alpha_u \, du + \int_0^t H_u \, dB_u$$

Avec $X_0 \in \mathcal{F}_0$, α et H deux processus \mathbb{F} -adaptés tels que : $\int_0^T |\alpha_u| \, du < \infty$ p.s. et $\int_0^T |H_u|^2 \, du < \infty$ p.s.

Définition. Soit \mathcal{I}^2 les processus d'Itô tels que :

$$\mathbb{E} \left[\int_0^T |\alpha_u| \, du \right] < \infty \text{ et } \mathbb{E} \left[\int_0^T |H_u|^2 \, du \right] < \infty$$

Proposition. Soit X un processus d'Itô de \mathcal{I}^2 alors sa décomposition est unique.

Proposition. Soit $X_t = X_0 + \int_0^t \alpha_u \, du + \int_0^t H_u \, dB_u$ un processus d'Itô de \mathcal{I}^2 alors X une martingale si et seulement si $\alpha = 0$ p.s.

Proposition (Variation quadratique d'un processus d'Itô).

Soient $X_t = X_0 + \int_0^t \alpha_u^X \, du + \int_0^t H_u^X \, dB_u$ et

$Y_t = Y_0 + \int_0^t \alpha_u^Y \, du + \int_0^t H_u^Y \, dB_u$ dans \mathcal{I}^2

$$\langle X \rangle_t = \int_0^t |H_u^X|^2 \, du$$

$$\langle X, Y \rangle_t = \int_0^t H_u^X H_u^Y \, du$$

Théorème (Formule d'Itô). Soit $f : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \in C^{1,2}$. Soit $X \in \mathcal{I}$, $X_t = X_0 + \int_0^t \alpha_u \, du + \int_0^t H_u \, dB_u$. Alors $Y_t = f(t, X_t) \in \mathcal{I}$

$$\begin{aligned} f(t, X_t) &= f(0, X_0) + \int_0^t \frac{\partial f}{\partial t}(u, X_u) \, du + \int_0^t \frac{\partial f}{\partial x}(u, X_u) \, dX_u \\ &\quad + \frac{1}{2} \int_0^t \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(u, X_u) \, d\langle X \rangle_u \end{aligned}$$

Proposition (Intégration par parties). Soient X et Y deux processus d'Itô. Alors :

$$X_t Y_t = X_0 Y_0 + \int_0^t X_s \, dY_s + \int_0^t Y_s \, dX_s + \int_0^t d\langle X, Y \rangle_s$$

Itô multidimensionnelle

Équations différentielles stochastiques

Théorème. Soit $T > 0$ et $a(\cdot, \cdot)$, $b(\cdot, \cdot) : [0, T] \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ des fonctions mesurables telles qu'il existe des constantes $C, L > 0$ satisfaisant :

$$|a(t, x)| + |b(t, x)| \leq C(1 + |x|), \forall x \in \mathbb{R}, t \in [0, T]$$

$$|a(t, x) - a(t, y)| + |b(t, x) - b(t, y)| \leq L|x - y|, \forall x, y \in \mathbb{R}, t \in [0, T]$$

Soit Z une variable aléatoire indépendante de la σ -algèbre \mathcal{F}_∞ générée par tous les B_s ($s \geq 0$) et telle que

$$\mathbb{E}[Z^2] < \infty$$

Alors l'équation différentielle stochastique

$$X_t = Z + \int_0^t a(s, X_s) \, ds + \int_0^t b(s, X_s) \, dB_s, t \in [0, T]$$

admet une unique solution X_t telle que :

1. X_t est continue par rapport à t
2. X_t est adaptée à la filtration \mathcal{F}_t^Z générée par Z et \mathcal{F}_t
3. $X \in L^2([0, T])$

$$\mathbb{E} \left[\int_0^T X_t^2 \, dt \right] < \infty$$

Représentation de martingales

Théorème. Soit $(M_t)_{t \in [0, T]}$ une martingale par rapport à la filtration naturelle d'un mouvement Brownien B_t . Supposons que $M \in \mathcal{M}^2([0, T])$. Alors il existe un processus adapté $(H_t)_{t \in [0, T]}$ tel que

$$M_t = M_0 + \int_0^t H_s \, dB_s$$

De plus $H \in \mathcal{L}^2([0, T])$

Proposition (Théorème de Girsanov élémentaire). Soit $T > 0$, $T < \infty$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. Considérons la mesure de probabilité \mathbb{Q} définie sur (Ω, \mathcal{F}) par

$$\frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}} = Z_t^\lambda \text{ où } Z_t^\lambda = \exp\{-\lambda B_t - \frac{\lambda^2}{2}t\}$$

Alors, le processus $\{B_t + \lambda t, t \in [0, T]\}$ est un \mathbb{F} -mouvement Brownien standard sur $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{Q})$.

Modèle de Black et Scholes

On suppose $S_t^0 = S_0^0 e^{rt}$ et $dS_t = \mu dS_t \, dt + \sigma S_t \, dB_t$. On note

$$\tilde{S}_t = \frac{S_t}{S_0^0}$$

Définition. La condition d'autofinancement de la stratégie (α, θ) est $dV_t = \alpha_t dS_t^0 + \theta_t dS_t$ ou encore $d\tilde{V}_t = \theta_t d\tilde{S}_t$. On appelle ensemble des portefeuilles admissibles :

$$\mathcal{A} := \left\{ \theta \text{ } \mathbb{F}\text{-adapté} : \mathbb{E} \left[\int_0^T |\theta_u \tilde{S}_u|^2 \, du \right] < \infty \right\}$$

Proposition. Notons $\lambda^* := (\mu - r)/\sigma$ et considérons la mesure de probabilité \mathbb{Q}^*

$$\frac{d\mathbb{Q}^*}{d\mathbb{P}|_{\mathcal{F}_t}} := Z_t^{\lambda^*} \text{ où } Z_t^{\lambda^*} := \exp \left\{ -\lambda^* B_t - \frac{(\lambda^*)^2}{2}t \right\}$$

Alors \tilde{S} est une \mathbb{F} -martingale sur \mathbb{Q}^* et pour toute stratégie financière $(x, \theta) \in \mathcal{A}$ la valeur actualisée $\tilde{V}^{x, \theta}$ est une

Proposition (Formules importantes).

$$\begin{aligned} dS_t &= \mu S_t \, dt + \sigma S_t \, dB_t \\ d\tilde{S}_t &= (\mu - r)\tilde{S}_t \, dt + \sigma \tilde{S}_t \, dB_t \\ dV_t &= r\alpha_t S_t^0 \, dt + \theta_t S_t \, dB_t \\ d\tilde{V}_t &= \theta_t d\tilde{S}_t = \theta_t(\mu - r)\tilde{S}_t \, dt + \sigma \theta_t \tilde{S}_t \, dB_t \\ dB_t^* &= dB_t + \lambda^* \, dt, \lambda^* = \frac{\mu - r}{\sigma} \\ dS_t &= rS_t \, dt + \sigma S_t \, dB_t^* \\ dS_t &= \sigma \tilde{S}_t \, dB_t^* \\ d\tilde{V}_t &= \theta_t d\tilde{S}_t = \theta_t \sigma \tilde{S}_t \, dB_t^*. \end{aligned}$$

Evaluation d'options européennes et équation de B et S

Proposition (Evaluation par réplication). Soit un actif contingent de payoff G . Supposons que $\mathbb{E}^{\mathbb{Q}^*}[G^2] < \infty$. Alors

1. l'actif G admet une stratégie de réplication (x^G, θ^G) .
2. sous la condition d'absence d'opportunités d'arbitrage A.O.A, son prix à la date t , noté p_t^G , est donné par :

$$p_t^G = S_t^0 \mathbb{E}^{\mathbb{Q}^*} [G/S_T^0 | \mathcal{F}_t] = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}^*} [e^{-r(T-t)} G | \mathcal{F}_t]$$

Théorème (Equation de Black et Scholes). Soit $v : [0, T] \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe $C^{1,2}$ solution de l'EDP :

$$\begin{aligned} \partial_t v(t, x) + \frac{1}{2} \sigma^2 x^2 \partial_{xx} v(t, x) &= rx \partial_x v(t, x) = rv(t, x), \forall (t, x) \\ v(T, x) &= \Phi(x) \end{aligned}$$

Nous supposons de plus que $\partial_x v$ est telle que

$$\mathbb{E} \left[\int_0^T |\partial_x v(t, S_t)|^2 \, dt \right] < \infty$$

Alors $(v(0, S_0), \{\partial_x v(t, S_t), 0 \leq t \leq T\}) \in \mathbb{R} \times \mathcal{A}$ est une stratégie de réplication de $G = \Phi(S_T)$ et le prix de G à la date t est $v(t, S_t)$. Preuve.

Les Grecques

- **delta** : $\partial_x u^G(t, S_t)$
- **gamma** : $\partial_{xx} u^G(t, S_t)$
- **thêta** : $\partial_t u^G(t, S_t)$