Processus de Lévy

Processus de Poisson

Définition. *Un processus de Poisson N de paramètre $\lambda > 0$ est un processus de comptage*

$$\forall t \geq 0, N_t = \sum_{n\geq 1} \mathbb{1}_{T_n \leq 1}$$

associé à une famille $(T_n; n \in \mathbb{N})$ (avec $T_0 = 0$) de va représentant les temps d'arrivées, telle que les va $(T_{n+1} - T_n; n \in \mathbb{N})$ sont iid de loi exponentielle de paramètre λ.

Proposition. *Si N est un processus de Poisson alors*

1. *la somme $N_t = \sum_{n\geq 1} \mathbb{1}_{T_n \leq 1}$ est presque sûrement finie pour tout $t \geq 0$.*
2. *les trajectoires de N sont constantes par morceaux, avec des sauts de taille 1 seulement*
3. *les trajectoires sont càdlàg*
4. *$\forall t > 0, \mathbb{P}(N_{t-} = N_t) = 1$*
5. *$\forall t > 0$, N_t suit une loi de Poisson de paramètre λt :*

$$\forall n \in N, \mathbb{P}(N_t = n) = e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^n}{n!}$$

En particulier on a :

$$\mathbb{E}[N_t] = \lambda t = \mathrm{Var}[N_t], \mathbb{E}[e^{iuN_t}] = \exp\left(\lambda t(e^{iu} - 1)\right)$$

6. *$\forall n \geq 1$, T_n une loi gamma de paramètre (n, λ) de densité :*

$$f_{T_n}(x) = \frac{(\lambda t)^{n-1}}{(n-1)!} \lambda e^{-\lambda t} \mathbb{1}_{t>0}$$

7. *N est à accroissements indépendants et stationnaires.*

Définition. *Soit N un processus stochastique (issu de 0) à valeurs réelles et càdlàg. N est un processus de Poisson ssi :*

1. *N est un processus croissant, constant par morceaux, ne faisant que des sauts de taille 1,*
2. *$\forall t, s \geq 0$, la va $N_{t+s} - N_t$ est indépendant de la tribu engendrée par les $(N_u; 0 \leq u \leq t)$*
3. *$\forall t, s \geq 0$, la va $N_{t+s} - N_t$ a même loi que N_s.*

On retrouve alors les va T_n en les définissant comme les sauts du processus N :

$$T_0 = 0, T_n = \inf\{t > T_{n-1}; N_t - N_{T_{n-1}} > 0\} \text{ pour } n \geq 1$$

Ce sont des temps d'arrêt par rapport à la filtration naturelle du processus N.

Théorème (Comportement asymptotique)**.** *Si N est un processus de Poisson d'intensité $\lambda > 0$ alors, lorsque t tend vers $+\infty$:*

$$p.s.\ \frac{N_t}{t} \to \lambda \text{ et } \sqrt{\frac{t}{\lambda}}\left(\frac{N_t}{t} - \lambda\right) \to \mathcal{N}(0, 1)$$

Définition (Processus de Poisson composés)**.** *Un processus de Poisson avec intensité $\lambda > 0$ et loi de sauts ν_Z est un processus stochastique défini par*

$$X_t = \sum_{k=1}^{N_t} Z_k$$

où $(Z_n)_n$ est une suite de va iid à valeurs dans $\mathbb{R}^d$ de loi ν_Z et N est un processus de Poisson de paramètre λ indépendant de la suite $(Z_n)_n$. Sa fonction caractéristique est donnée par :

$$\phi_{X_t}(u) = \exp\left(t \int_{\mathbb{R}^d} (e^{i\langle u,y\rangle} - 1)\lambda \nu_Z(\mathrm{d}y)\right)$$

X est à accroissements indépendants et stationnaires.

Processus de Lévy

Lois infiniment divisible

Définition. *Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{R}^d$ de loi μ_X. On dit que X est infiniment divisible si, pour tout $n \in N$, il existe des va iid $Y_1^{(n)}, \ldots, Y_n^{(n)}$ telles que*

$$X = Y_1^{(n)} + \cdots + Y_n^{(n)}$$

Soit $\varphi_X(u) = \mathbb{E}[e^{i\langle u,X\rangle}]$ la fonction caractéristique de X.

Proposition. *Il y a équivalence entre :*

1. *X est infiniment divisible,*
2. *pour tout n, φ_X a une racine n-ième qui est la fonction caractéristique d'une variable aléatoire.*

Formule de Lévy-Khintchine

On dira que ν est une mesure de Lévy si

$$\int_{\mathbb{R}^d - \{0\}} (1 \wedge z^2)\nu(\mathrm{d}z) < +\infty$$

C'est une mesure σ-finie. C'est équivalent de dire que

$$\int_{\mathbb{R}^d - \{0\}} \frac{z^2}{1+z^2} \nu(\mathrm{d}z) < +\infty$$

Théorème (Formule de Lévy-Khintchine)**.** *Soit X une va à valeurs dans $\mathbb{R}^d$. Alors X est infiniment divisible s'il existe $b \in \mathbb{R}^d$, une matrice $A \in R^{d\times d}$ et une mesure de Lévy ν tels que*

$$\forall u \in \mathbb{R}^d, \varphi_X(u) = \exp\left(i\langle b, u\rangle - \frac{1}{2}\langle u, Au\rangle + \int_{\mathbb{R}^d - \{0\}} e^{i\langle u,z\rangle} - 1 - i\langle u, z\rangle \mathbb{1}_{|z|\leq 1} \nu(\mathrm{d}y)\right)$$

Réciproquement, toute application de la forme ci-dessus est la fonction caractéristique d'une va infiniment divisible sur R^d.

Processus de Lévy

Définition. *On dit que X est un processus de Lévy (issu de 0) si*

1. *$X_0 = 0$ preque sûrement*
2. *X est à accroissements indépendants et stationnaires*
3. *X est stochastiquement continu : $\forall \epsilon > 0$ et $t \geq 0$:*

$$\lim_{h\to 0} \mathbb{P}\left(|X_{t+h} - X_t| > \epsilon\right) = 0$$

Proposition. *Si X est un processus de Lévy, alors X_t est une loi infiniment divisible pour tout $t \geq 0$.*

Théorème. *Si X est un processus de Lévy, alors*

$$\forall u \in \mathbb{R}^d, \varphi_{X_t}(u) = e^{t\eta(u)}$$

où η est le symbole de Lévy de X_1.

Proposition. *Si $X = (X_t; t \geq 0)$ est un processus stochastique et s'il existe une suite $Xn = (X_t^n; t \geq 0)_n$ de processus de Lévy telle que :*

1. *X_t^n converge en probabilité vers X_t pour tout $t \geq 0$*
2. *pour tout $\epsilon > 0$, $\lim_{n\to\infty} \limsup_{t\to 0} \mathbb{P}(|X_t^n - X_t| > \epsilon) = 0$*

alors X est un processus de Lévy.

Théorème (Propriété de Markov Forte)**.** *Si X est un processus de Lévy et si τ est un temps d'arrêt adapté à la filtration $\mathcal{F}^X$, alors, sur $\{\tau < +\infty\}$*

1. *le processus $X^\tau = (X_{t+\tau} - X_\tau; t \geq 0)$ est un processus de Lévy indépendant de la tribu $\mathcal{F}_\tau^X$*
2. *pour tout $t \geq 0$, X_t^τ a même loi que X_t*
3. *X^τ est à trajectoires càdlàg et est $F_{\tau+t}$ adapté.*

Théorème. *Si X est un processus de Lévy à valeurs réelles, croissant (presque sûrement) et ne faisant que des sauts de taille 1, alors X est un processus de Poisson.*

Théorème. *Si X est un processus de Lévy càdlàg à valeurs réelles, presque sûrement à trajectoires constantes par morceaux, alors X est un processus de Poisson composé. La réciproque est trivialement vraie.*

Sauts des Processus de Lévy

Si X est un processus de Lévy, on définit le processus de sauts associé $\Delta X = (\Delta X_t; t \geq 0)$ avec $\Delta X_t = X_t - X_{t-}$.

Proposition. *Si X est un processus de Lévy alors, pour chaque $t \geq 0$ on a $\Delta Xt = 0$ presque sûrement.*

Définition. *Soit $t \geq 0$ et $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d - \{0\})$. On définit la quantité aléatoire*

$$N(t, A) = \#\{0 \leq s \leq t; \Delta X_s \in A\} = \sum_{0\leq s\leq t} \mathbb{1}_A(\Delta X_s)$$

$\forall \omega$, $A \to N(t, A)(\omega)$ est une mesure de comptage sur $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d - \{0\})$
$A \to \mathbb{E}[N(t, A)]$ est une mesure borélienne sur $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d - \{0\})$
On notera $\mu(\cdot) = \mathbb{E}[N(1, \cdot)]$ appelé mesure d'intensité du processus X.

Lemme. *Si A est borné inférieurement et borélien, alors $N(t, A) < \infty$ presque sûrement.*

Théorème. *Si A est borné inférieurement, alors le processus $(N(t, A); t \geq 0)$ est un processus de Poisson d'intensité $\mu(A)$. De plus si $A_1, \ldots, A_m \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d - \{0\})$ sont disjoints alors les variables aléatoires $N(t, A_1), \ldots, N(t, A_m)$ sont indépendantes.*

Mesure aléatoire de Poisson

Définition. *Soit μ une mesure σ finie sur $(S, \mathcal{A})$. Une mesure aléatoire de Poisson N sur $(S, \mathcal{A})$ est une collection de variables aléatoires $(M(B); B \in \mathcal{A})$ telle que :*

1. *pour tout $B \in \mathcal{A}$ tel que $\mu(B) < +\infty$, $N(B)$ suit une loi de Poisson de paramètre $\mu(B)$*
2. *si $A_1, \ldots, A_m$ sont des ensembles disjoints de A, les variables aléatoires $N(A_1), \ldots, N(A_m)$ sont indépendantes*
3. *pour tout $\omega \in$, l'application $A \to N(A, \omega)$ est une mesure de comptage sur $(S, \mathcal{A})$.*

On définit la mesure aléatoire de Poisson compensée $\tilde{N}$ par :

$$\tilde{N}(t, A) = N(t, A) - t\mu(A) = N(t, A) - t\mathbb{E}[N(1, A)]$$

Intégration de Poisson

On définit pour tout $t \geq 0$ et $\omega \in$ l'intégrale de Poisson de f par

$$\int_A f(z) N(t, \mathrm{d}z) = \sum_{z \in A} f(z) N(t, z)$$

Si N est associée à un processus de Lévy, cette intégrale coïncide avec

$$\int_A f(z) N(t, \mathrm{d}z) = \sum_{0 \leq s \leq t} f(\Delta X_s) \mathbb{1}_A(\Delta X_s)$$

Théorème. *Soit A un ensemble borélien borné inférieurement. Alors :*

1. *pour tout $t \geq 0$, $\int_A f(z) N(t, \mathrm{d}z)$ suit une loi de Poisson composée caractérisée par :*
$$\mathbb{E}\left[e^{\left(i\langle u, \int_A f(z) N(t, \mathrm{d}z)\rangle\right)}\right] = \exp\left(t \int_A (e^{i\langle u, f(z)\rangle} - 1)\mu(\mathrm{d}z)\right)$$
2. *si $f \in L^1(A, \mu)$ on a :*
$$\mathbb{E}\left[\int_A f(z) N(t, \mathrm{d}z)\right] = t \int_A f(z) \mu(\mathrm{d}z)$$
3. *si $f \in L^2(A, \mu)$ on a :*
$$\mathrm{Var}\left(|\int_A f(z) N(t, \mathrm{d}z)|\right) = t \int_A |f(z)|^2 \mu(\mathrm{d}z)$$

Corollaire. *Soit A un ensemble borélien borné inférieurement. Le processus $t \to \int_A f(z) N(t, \mathrm{d}z)$ est un processus de Poisson composé.*

Proposition. *Si A, B sont bornés inférieurement et si $f \in L^2(A, \mu)$, $g \in L^2(B, \mu)$, on a :*

$$\langle \int_A f(z) \tilde{N}(t, \mathrm{d}z), \int_B g(z) \tilde{N}(t, \mathrm{d}z) \rangle = t \int_{A \cap B} f(z) g(z) \mu(\mathrm{d}z)$$

Décomposition d'Itô-Lévy

Théorème (Itô-Lévy). *Si X est un processus de Lévy alors il existe $b \in R^d$, un mouvement brownien B, une matrice de covariance $A \in R^{d \times d}$ et une mesure aléatoire de Poisson indépendante N on $\mathbb{R}_+ \times (\mathbb{R}^d - \{0\})$, dont l'intensité est une mesure de Lévy ν, tels que, pour tous $t \geq 0$:*

$$X_t = b_t + A^{1/2} B_t + \int_{|z|<1} z \tilde{N}(t, \mathrm{d}z) + \int_{|z|>1} z N(t, \mathrm{d}z)$$

Intégration stochastique

Formule d'Itô

Soit $B = (B_t; t \geq 0)$ un F_t-mouvement brownien standard d-dimensionnel. Soit N une F_t-mesure aléatoire de Poisson sur $\mathbb{R}_+ \times \mathcal{B}(\mathbb{R}^d - \{0\})$ d'intensité $\mathrm{d}t \otimes \mathrm{d}\nu$, où ν est une mesure de Lévy.
Soit N sa mesure aléatoire de Poisson compensée.
Soit $b : [0, T] \times \; \to \mathbb{R}^d$ et $\sigma : [0, T] \times \; \to R^{d \times d}$ des processus $\mathcal{F}_t$-adapté prévisible tels que :

$$\mathbb{E}\left[\int_0^T |b(r)|^2 + |\sigma(r)|^2 \,\mathrm{d}r\right] < +\infty$$

et $H, K : [0, T] \times (\mathbb{R}^d/0) \times \; \to \mathbb{R}^d$ des processus prévisibles tels que $H \in H^2(T, \nu)$. On considère le processus, pour $0 \leq t \leq T$.

$$X_t = X_0 + \int_0^t b(r) \,\mathrm{d}r + \int_0^t \sigma(r) \,\mathrm{d}B_r + \int_0^t \int_{|z|<1} H(r, z) \tilde{N}(\mathrm{d}r, \mathrm{d}z) + \int_0^t \int_{|z|>1} K(r, z) N(\mathrm{d}r, \mathrm{d}z).$$

Théorème. *Si X est telle que ci-dessus, alors, pour toute fonction $f \in C^2(\mathbb{R}^d)$ et $t \geq 0$, p.s. :*

$$\begin{aligned}
f(X_t) - f(X_0) &= \int_0^t \langle \partial_x f(X_{r-}), b(r) \rangle \,\mathrm{d}r + \int_0^t \langle \partial_x f(X_{r-}), \sigma(r) \,\mathrm{d}B_r \rangle \\
&+ \frac{1}{2} \int_0^t \mathrm{Tr}(\partial^2_{xx} f(X_{r-} \sigma(r) \sigma(r)^\top) \,\mathrm{d}r \\
&+ \int_0^t \int_{|z|>1} [f(X_{r-} + K(r, z)) - f(X_{r-})] \, N(\mathrm{d}r, \mathrm{d}z) \\
&+ \int_0^t \int_{|z|<1} [f(X_{r-} + H(r, z)) - f(X_{r-})] \, \tilde{N}(\mathrm{d}r, \mathrm{d}z) \\
&+ \int_0^t \int_{|z|<1} [f(X_{r-} + H(r, z)) - f(X_{r-}) - \langle H(r, z), \partial_x f(X_{r-} \rangle] \,\mathrm{d}r \, \nu(\mathrm{d}z)
\end{aligned}$$

Théorème. *Ou alors :*

$$\begin{aligned}
f(X_t) - f(X_0) &= \underbrace{\int_0^t \partial_i f(X_{s-}) \,\mathrm{d}Y^i_c(s) + \frac{1}{2} \int_0^t \partial^2_{ij} f(X_{s-} \,\mathrm{d}\langle Y^i_c, Y^j_c \rangle(s)}_{\textit{Itô "Normal"}} \\
&+ \underbrace{\int_0^t \int_{|z|>1} [f(X_{s-} + K(s, z)) - f(X_{s-})] \, N(\mathrm{d}s, \mathrm{d}z)}_{\textit{Variations de f, grands sauts, non compensé}} \\
&+ \int_0^t \int_{|z|<1} [f(X_{s-} + H(s, z)) - f(X_{s-})] \, \tilde{N}(\mathrm{d}s, \mathrm{d}z) \\
&+ \underbrace{\int_0^t \int_{|z|<1} [f(X_{s-} + H(s, z)) - f(X_{s-}) - H^i(s, z) \partial_i f(X_{s-}] \,\mathrm{d}s \, \nu(\mathrm{d}z)}_{\textit{Variations de f, petits sauts, compensé}}
\end{aligned}$$

---

http ://ausset.me/cheatsheets