Programmation Dynamique

Horizon fini

Principe de la programmation dynamique

Proposition. *Soit $x \in A$ alors $(x, x_1, \dots, x_T)$ solutions de $v(0,x) \implies \forall \tau = 1, \dots, T-1$, la suite $(x_\tau, \dots, x_T)$ est solution de $v(\tau, x_\tau)$*

Proposition. *Soit $x \in A$,*
$v(t,x) = \sup\{V_t(x,y) + v(t+1,y) : y \in \Gamma_t(x)\}$

Backward induction

Proposition. *$(x, x_1, \dots, x_T)$ solution de $v(0,x) \Leftrightarrow \forall t = 0, \dots, T-1$; x_{t+1} solution de $\sup\limits_{y \in \Gamma_t(x_t)} \{V_t(x_t, y) + v(t+1, y)\}$*

Horizon infini

Problèmes à horizon escompté du type

$$v(x) := \sup\left\{\sum_{t=0}^{\infty} \beta^t V(x_t, x_{t+1}) x_0 = x, x_t \in A, x_{t+1} \in \Gamma(x_t)\right\}$$

Notations et hypothèses

- A espace métrique compact
- $\Gamma(x) \neq \emptyset, \forall x \in A$
- $V(.,.)$ continue sur $A \times A$
- $\mathrm{Adm}(x) := \{\tilde{x} = (x_t)_{t \geq 0} : x_0 = x, x_t \in A, x_{t+1} \in \Gamma(x_t) \forall t \geq 0\}$

Définition. *Soient X et Y espaces métriques et F correspondance à valeurs **compactes non vides** de X dans Y et $x \in X$:*

1. *F **h.c.s** en x si $\forall x_n \to x \in X$ et $\forall y_n \in F(x_n)$ la suite y_n admet une valeur d'adhérence dans $F(x)$*
2. *F **h.c.i** en x si $\forall y \in F(x)$ et $\forall x_n \to x \in X, \exists y_n \in F(x_n)$ telle que $y_n \to y \in Y$*

Ou de façon équivalente :

1. *F **h.c.s** en x si pour tout ouvert V contenant $F(x)$, il existe un voisinage U de x tel que V contienne $F(y)$ pour tous les y de U*
2. *F **h.c.i** en x si pour tout ouvert V qui rencontre $F(x)$, il existe un voisinage U de x tel que V rencontre $F(y)$ pour tous les y de U*

Existence de solutions

Proposition. *(A_∞, d_∞) est compact.*

Lemme. *$\forall x \in A$, $\mathrm{Adm}(x)$ est un compact de (A_∞, d_∞).*

Lemme. *u est continue sur (A_∞, d_∞).*

Proposition (Fonction valeur, équation de Bellman)**.**

- *Si $\tilde{x} \in \mathrm{Adm}(x)$ est solution de $v(x)$ alors pour tout $\tau \geq 0$ la suite $(x_t)_{t \geq \tau}$ est solution du problème $v(x_\tau)$*
- *$v(.)$ solution de $v(x) = \sup\limits_{y \in \Gamma(x)} \{V(x,y) + \beta v(y)\}$*

Berge et Blackwell

Pour tout $f \in B(A)$ on définit :
$Tf(x) := \sup\limits_{y \in \Gamma(x)} \{V(x,y) + \beta f(y)\}$

Théorème (Théorème de Blackwell)**.** *Soit H un opérateur de $B(A)$ dans lui même vérifiant :*

1. *H monotone*
2. *$\exists \eta \in]0,1[$ tel que $\forall a > 0, f \in B(A)$ on ait $H(f+a) \leq Hf + \eta a$*

alors H est une contraction de $B(A)$ de rapport η

Corollaire. *L'équation de Bellman admet une unique solution, et $\forall f \in B(A)$, v limite uniforme de la suite $T^n f$*

Proposition. *$\forall f \in C^0(A, \mathbb{R}), Tf \in C^0(A, \mathbb{R})$ donc v continue.*

Théorème (Théorème de Berge)**.** *Soit X et Y deux métriques, F une correspondance **continue, à valeurs compactes, non vides** de X dans Y. $f \in C^0(X \times Y, \mathbb{R})$. Pour tout $x \in X$ soit :*

$$g(x) := \max_{y \in F(x)} f(x,y) \text{ et } M := \{y \in F(x) : f(x,y) = g(x)\}$$

Alors g est continue sur X et M une correspondance à valeurs non vides, h.c.s.

Temps continu

Equation d'Euler-Lagrange

$$\sup_{x \in C^1([0,T])} J(x) = \int_0^T L(t, x(t), \dot{x}(t))\,\mathrm{d}t + g(x(T)) + f(x(0))$$

- L, g et f sont C^1
- $L_{v_i} = \frac{\partial L}{\partial v_i}$ et $L_{x_i} = \frac{\partial L}{\partial x_i}$
- $\nabla_v L = (L_{v_1}, \dots, L_{v_n})'$ et $\nabla_x L = (L_{x_1}, \dots, L_{x_n})'$

Proposition. *Soit $x \in C^1([0,T])$, si x solution alors on a :*

1. *x solution des équations d'Euler-Lagrange :*
$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[\nabla_v L(t, x(t), \dot{x}(t))] = \nabla_x L(t, x(t), \dot{x}(t))$$
2. *x verifie les conditions de transversalité :*
$$\nabla_v L(0, x(0), \dot{x}(0)) = f'(x(0))$$
$$\nabla_v L(T, x(T), \dot{x}(T)) = -g'(x(T))$$
3. *Si on suppose que g et f concaves sur $\mathbb{R}^n$ et que $\forall t \in [0,T]$, $L(t,.,.)$ est concave sur $\mathbb{R}^n$ alors si $x \in C^1([0,T])$ verifie les équations d'Euler-Lagrange et les conditions de transversalité alors x est solution.*

Principe de la programmation dynamique

$$v(t,x) = \sup\left\{\int_t^T L(s, y, \dot{y})\,\mathrm{d}s + g(y(T)) : y \in C^1, y(t) = x\right\}$$

Proposition. *La fonction valeur verifie pour tout $x \in \mathbb{R}^n$ et $t \in [0,T]$:*

$$v(0,x) = \sup\left\{\int_t^T L(s, y(s), \dot{y}(s))\,\mathrm{d}s + v(t, y(t)), y(0) = x\right\}$$

Equations d'Hamilton-Jacobi

Proposition. *Supposons v régulière, alors v solution de :*

$$\partial_t v(t,x) + H(t, x, \nabla_x v(t,x)) = 0$$
$$H(t,x,p) := \sup_{q \in \mathbb{R}^n}\{q.p + L(t,x,q)\}$$

Contrôle optimal

$$\sup_{u \in \mathcal{U}} J(u) = \int_0^T L(s, x(s), u(s))\,\mathrm{d}s + g(x(T))$$
$$\dot{x}(t) = f(t, x(t), u(t)), x(0) = x_0$$

Théorème. *Supposons f continue et*

$$\exists M > 0, |f(t,x,u) - f(t,y,u)| \leq M|x-y|, \forall (t,x,y,u)$$

Alors sous ces hypothèses, tout contrôle admissible $u \in \mathcal{U}$ et toute condition initiale x_0 l'équation admet une solution unique.

Lemme (Lemme de Gronwall)**.** *Si $x \in C^0$ satisfait pour des constantes $a \geq 0$ et $b \geq 0$:*

$$|x(t)| \leq a + b\int_0^t |x(s)|\,\mathrm{d}s, \forall t \in [0,T]$$

Alors $|x(t)| \leq ae^{bt}, \forall t \in [0,T]$

Principe de Pontryagin

Théorème (Théorème d'Ascoli). *Soit $\mathcal{F}$ une partie de C^0 telle que :*

$$\exists M : |f(t)| \leq M, \forall t \in [0,T], \forall f \in \mathcal{F}$$
$$\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0 : |f(t) - f(s)| \leq \epsilon, \forall f \in \mathcal{F}, \forall t, s \ tq \ |t-s| \leq \delta$$

Alors $\mathcal{F}$ est relativement compacte dans C^0

Définition. *On suppose :*

- *L continue, différentiable par rapport à x et $\nabla_x L$ continue en t, x, u*
- *g de classe C^1*
- *f est differentiable par rapport à x et $D_x f$ est continue en t, x, u*

Supposons $\bar{u}$ un contrôle optimal, et $\bar{x} = y_{\bar{u}}$ l'état optimal. Soit $t \in]0,T[$ un point de continuité de $\bar{u}$ et $v \in K$ un contrôle admissible constant arbitraire. Pour $\epsilon \in]0,T[$ posons :

$$u_\epsilon(s) = \begin{cases} v & si\ s \in [t-\epsilon, t] \\ \bar{u}(s) & sinon \end{cases}$$

et notons $x_\epsilon = y_{u_\epsilon}$ le contrôle associé.

Lemme. *Soit $z_\epsilon = \epsilon^{-1}(x_\epsilon - \bar{x})$ alors z_ϵ est borné et converge simplement sur $[0,T[$ et uniformement sur $[t,T]$ vers z qui résout l'équation linéarisé :*

$$\dot{z}(s) = D_x f(s, x(s), \bar{u}(s)) z(s) \ \ sur \ (t, T]$$
$$z(t) = f(t, \bar{x}(t), v) - f(t, \bar{x}(t), \bar{u}(t))$$

Théorème. *Soit $\bar{u}$ un contrôle optimal, continu par morceaux et soit $\bar{x}$ l'état optimal correspondant. Alors pour chaque point t de continuité de u, on a*

$$\bar{u}(t) \in \arg\max_{v \in K} \underline{H}(t, \bar{x}(t), v, p(t))$$

avec p l'état adjoint, i.e. la solution de

$$\dot{p}(s) = -\nabla_x \underline{H}(s, \bar{x}(s), \bar{u}(s), p(s)), s \in [0,T]$$

Ou $\underline{H}$ est le pré-Hamiltonien :

$$\underline{H}(t, x, u, p) = L(t, x, u) + p.f(t, x, u)$$
$$\forall (t, x, u, p) \in [0,T] \times \mathbb{R}^d \times K \times \mathbb{R}^d$$

avec la condition terminale de transversalité :

$$p(T) = \nabla g(\bar{x}(T))$$

Equation d'Hamilton-Jacobi

Proposition (Equation d'Hamilton-Jacobi-Bellman). *Supposons v régulière, alors v est solution de l'équation d'Hamilton-Jacobi-Bellman :*

$$\partial_t v(t,x) + H(t, x, \nabla_x v(t,x)) = 0$$

Contrôle Feedback et conditions suffisante

$$\partial_t w(t,x) + H(t, x, \nabla_x w(t,x)) = 0 \qquad (\star)$$
$$w(T, x) = g(x) \forall x \in \mathbb{R}^n$$

Théorème. *Supposons que w est une solution de classe C^1 du problème aux limites $\star$, et que pour tout $(t,x) \in [0,T] \times \mathbb{R}^n$, il existe $U(t,x) \in V$ solution du problème :*

$$\sup_{u \in V} \{ L(t,x,u) + \nabla_x w(t,x).f(t,x,u) \}$$

alors U est un contrôle optimal en feedback et donc si y est solution de

$$\dot{y}(t) = f(t, y(t), U(t, y(t))), y(0) = x$$

y est une trajectoire optimale et $u^\star(t) = U(t, y(t))$ est un contrôle optimal. Enfin, w est la fonction valeur du problème.

---

http ://ausset.me/cheatsheets